1896. ANNALEN № 1.

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND 57.

1. *Absorption und Emission electrischer Wellen durch Resonanz; von Max Planck.*

(Aus den Sitzungsberichten der k. preuss. Akad. der Wissensch. zu Berlin, phys.-math. Klasse vom 21. März 1895; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

§ 1. Wenn eine irgendwie erregte, im Luftraum fortschreitende electromagnetische Welle von bestimmter Periode auf einen secundären Leiter trifft, dessen Eigenperiode nahezu übereinstimmt mit derjenigen der primären Welle, so wird derselbe durch Resonanz zu electrischen Schwingungen angeregt werden, um so lebhafter, je weniger sich die Perioden unterscheiden. Dadurch wird der secundäre Leiter nothwendig der Ursprung einer besonderen secundären Welle, welche im umgebenden Luftraum mit der primären Welle zusammentrifft und so zu Erscheinungen Anlass giebt, die von denjenigen verschieden sind, welche die primäre Welle allein darbieten würde. Die Amplitude dieser Secundärschwingung, sowie deren Rückwirkung auf die primäre Welle soll im Folgenden untersucht und für einige typische Fälle berechnet werden.

Im Allgemeinen zerfällt der ganze Vorgang des Mitschwingens in drei aufeinanderfolgende Epochen: das Anschwellen, den stationären Zustand, und das Abklingen, wenn die erregende Welle verschwindet. In der ersten Epoche wird dem secundären Leiter die zum Mitschwingen erforderliche Energie durch die primäre Welle zugeführt, er nimmt also strahlende Energie auf. In der zweiten Epoche ist der electromagnetische Zustand des secundären Leiters periodisch, er nimmt also von Aussen im Ganzen nur so viel strahlende Energie auf, als er zum Ersatze für den fortwährenden Energieverlust durch die Joule'sche Wärme bedarf. In der dritten Epoche endlich verliert er seine electromagnetische Energie wieder, indem er sie theils durch Strahlung emittirt, theils in Joule'sche Wärme verwandelt.

Um einen festen Anhalt für die Betrachtung des allgemeinen Falles zu gewinnen, untersuchen wir zunächst einen besonders einfachen Fall, nämlich den stationären Zustand eines durch irgend eine periodische primäre Welle zu linearen elektrischen Schwingungen angeregten secundären Leiters. Wenn auch die Herstellung ungedämpfter Wellen in der Natur nur in sehr roher Annäherung möglich ist, so wird immerhin eine Reihe wesentlicher Eigenschaften der stationären Resonanz auch bei den wirklich herstellbaren Wellen zu beobachten sein. Eine andere, ebenfalls nur angenähert, aber schon viel eher in der Natur erfüllte Vereinfachung, die wir einführen wollen, ist die, dass die im secundären Leiter entwickelte Joule'sche Wärme verschwindend klein ist gegenüber der gleichzeitig von ihm ausgestrahlten Energie. Dann nimmt der secundäre Leiter im stationären Zustand des Mitschwingens im Ganzen gar keine strahlende Energie von Aussen auf, d. h. es wird die Energiemenge, die er vermöge seiner Schwingung nach Aussen emittirt, immer gerade ersetzt durch Absorption strahlender Energie von der primären Welle. Der Betrag dieser Emission und Absorption ist aus den allgemeinen Maxwell'schen Gleichungen des electromagnetischen Feldes genau zu ermitteln.

Betrachten wir zunächst eine einzelne isolirte periodische lineare Schwingung, vorläufig noch ohne Rücksicht auf die zu ihrer Aufrechterhaltung nothwendige Energiezufuhr. Die Gleichungen, welche den Zustand des elektromagnetischen Feldes ringsherum, mit Ausschluss eines kleinen, das Schwingungscentrum enthaltenden Raumes, bedingen, sind vollständig von H. Hertz[1]) angegeben worden.

Bezeichnet nämlich t die Zeit, r die Entfernung eines Punktes des Feldes vom Schwingungscentrum, $x\,y\,z$ seine Coordinaten im rechtwinkeligen Maxwell'schen Coordinatensystem mit dem Schwingungscentrum als Anfangspunkt, c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen, τ die Zeit einer ganzen Schwingung, $\lambda = c\tau$ die Wellenlänge, α eine positive Constante, δ eine andere Constante, und setzt man:

$$(1) \qquad F = \frac{\alpha}{r} \sin \Theta \qquad \Theta = 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r}{\lambda}\right) + \delta$$

1) H. Hertz, Wied. Ann. **36.** p. 1. 1889.

so sind, falls die Richtung der linearen Schwingung zur Z-Axe genommen wird, die Componenten der elektrischen Kraft:

$$(2)\qquad \begin{cases} X = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \\ Y = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \\ Z = \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{cases}$$

und die Componenten der magnetischen Kraft:

$$(3)\qquad \begin{cases} L = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial t} \\ M = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} \\ N = 0 \end{cases}$$

Hierbei strömt nach dem Poynting'schen Satze durch irgend ein Flächenelement $d\sigma$ des Feldes in der Richtung seiner Normalen ν in der Zeit dt die Energiemenge:

$$(4)\qquad \frac{c}{4\pi} d\sigma\, dt \{(YN - ZM)\cos \nu x + (ZL - XN)\cos \nu y + (XM - YL)\cos \nu z\}$$

woraus sich durch Integration über die Zeit τ und über eine beliebige geschlossene um das Schwingungscentrum gelegte Fläche die in der Zeit einer Schwingung ausgestrahlte Energie ergiebt. Hertz hat zur Vereinfachung der Rechnung eine Kugel mit dem Schwingungscentrum als Mittelpunkt und mit einem im Verhältniss zur Wellenlänge grossen Radius genommen und so für diese Emission gefunden:

$$(5)\qquad \frac{16\pi^4}{3\lambda^3}\alpha^2$$

Zur Aufrechterhaltung des periodischen Vorganges bedarf also das Schwingungscentrum der Zufuhr von fremder Energie in dem angegebenen Betrage.

Nun betrachten wir ganz die nämliche, von jetzt ab als secundär zu bezeichnende Schwingung, nehmen aber ausserdem an, dass eine irgendwo erregte primäre Welle von der nämlichen Periode τ über das Schwingungscentrum und das umgebende Feld hinwegstreicht. Ihre Kräftecomponenten seien $X'\, Y'\, Z'\, L'\, M'\, N'$; dieselben brauchen im Uebrigen keine weiteren Bedingungen zu erfüllen, als dass sie überall ausserhalb der primären Erreger endlich und stetig sind und den Maxwell'schen Gleichungen für den Luftraum Genüge leisten. Dann stellen auch die Summen:

$$X' + X,\ Y' + Y,\ Z' + Z,\ L' + L,\ M' + M,\ N' + N$$

einen im Luftraum möglichen electromagnetischen Vorgang dar, der auch in Wirklichkeit eintreten wird, sobald die entsprechenden Grenzbedingungen erfüllt sind.

Berechnen wir nun für diesen Vorgang die Energie, welche in der Zeit τ durch eine die secundäre Schwingung umschliessende, die primären Erreger aber ausschliessende, im Uebrigen beliebige Fläche nach Aussen strömt. Dieselbe ist natürlich unabhängig von dem specielleren Verlauf der Fläche, und ergiebt sich wieder durch Integration des Ausdrucks (4), wenn man darin statt X den Werth $X' + X$, und ebenso für jede andere Kraftcomponente die entsprechende Summe einsetzt. Man sieht daraus, dass die nun aus jener geschlossenen Fläche in der Zeit τ ausströmende Energie im Allgemeinen nicht mehr den früheren Werth (5) hat, sondern in drei Theile zerfällt:

$$E_1 + E_2 + E_3 \tag{6}$$

entsprechend der Zerlegung des Ausdrucks

$$(Y' + Y)\,(N' + N) - (Z'\,(Z + (M' + M)$$

in die drei Theile:

$$(Y' N' - Z' M') + (Y N - Z M) + (Y' N + Y N' - Z' M - Z M')$$

und ebenso für die beiden anderen in (4) enthaltenen Glieder. Der erste Theil der in der Zeit einer Schwingung ausströmenden Energie: E_1 entspricht dem Fall, dass die primäre Schwingung ganz allein im Raume besteht, es ist also:

$$E_1 = 0 \tag{7}$$

weil die primären Erreger alle ausserhalb des von der Fläche umschlossenen Raumes liegen.

Der zweite Theil E_2 entspricht dem Falle, dass die secundäre Schwingung ganz allein im Raume vorhanden ist; er hat also den durch (5) angegebenen Werth. Doch empfiehlt es sich mit Rücksicht auf besondere Anwendungen, diesen Betrag auf etwas allgemeinerem Wege als Hertz es gethan hat, nämlich durch Integration über eine um das Schwingungscentrum als Mittelpunkt gelegte Kugelfläche mit dem beliebigen Radius r abzuleiten. Hierzu dient am einfachsten die Einführung von Polarcoordinaten r, ϑ, φ in folgender Weise:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi \quad z = r \cos \vartheta.$$

Dann sind mit Rücksicht auf die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2 \,.\, \Delta F = \frac{c^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r}\right)$$

die Componenten (2) der elektrischen Kraft:

$$\tag{8} \left\{\begin{aligned} X &= \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{3}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right)\cos\varphi \sin\vartheta \cos\vartheta \\ Y &= \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{3}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right)\sin\varphi \sin\vartheta \cos\vartheta \\ Z &= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\sin^2\vartheta + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\left(1 - 3\cos^2\vartheta\right) \end{aligned}\right.$$

und die Componenten (3) der magnetischen Kraft:

$$\tag{9} \left\{\begin{aligned} L &= \frac{1}{c}\frac{\partial^2 F}{\partial r\, \partial t}\sin\varphi \sin\vartheta \\ M &= -\frac{1}{c}\frac{\partial^2 F}{\partial r\, \partial t}\cos\varphi \sin\vartheta \\ N &= 0 \end{aligned}\right.$$

Diese sechs Werthe in (4) eingesetzt, ergeben nach gehöriger Reduction:

$$\frac{d\sigma\, dt}{4\pi}\sin^2\vartheta \frac{\partial^2 F}{\partial r\, \partial t}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right).$$

Bei der Integration über die Schwingungsdauer τ kommt das Glied mit dem Factor:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r\, \partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial r}$$

in Fortfall, weil dieses Glied der Differentialcoefficient einer periodischen Function nach t ist; es bleibt also übrig das andere Glied, welches durch Integration über die Zeit ergibt:

$$\tag{10} \frac{2\pi^3\, d\sigma}{r^2}\frac{\alpha^2}{\lambda^3}\sin^2\vartheta$$

Integrirt man endlich über die ganze Kugelfläche, so folgt:

$$E_2 = \frac{16\,\pi^4}{3\,\lambda^3}\alpha^2$$

in Uebereinstimmung mit dem unter (5) gegebenen Ausdruck.

Der dritte Theil endlich: E_3 wird erhalten aus folgendem Ausdruck:

$$\frac{c}{4\pi}\, d\sigma\, d t \left\{(Y' N + Y N' - Z' M - Z M') \cos \nu x + \ldots\right\}$$

durch Integration über die Zeit τ und über die Fläche, deren Element $d\sigma$ und deren äussere Normale ν ist.

Nehmen wir als Fläche wieder die vorige Kugel mit dem Radius r, so ergibt die Einführung der Kräftecomponenten aus (8) und (9):

$$\frac{d\sigma\, d t}{4\pi} \sin\vartheta \left\{ (X' \cos\varphi \cos\vartheta + Y' \sin\varphi \cos\vartheta - Z' \sin\vartheta) \frac{d^2 F}{\partial r\, \partial t} \right.$$
$$\left. + c\,(L' \sin\varphi - M' \cos\varphi) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}\right)\right\}.$$

Nun wählen wir den Kugelradius r klein gegen die Wellenlänge und klein gegen die Entfernungen der primären Erreger vom secundären Schwingungscentrum, wodurch ja das gesuchte Integral E_3 nicht geändert wird. Dann lassen sich die gestrichenen Grössen, welche im secundären Schwingungscentrum endlich und stetig sind, für jeden Punkt der Kugeloberfläche als lineare Functionen der Coordinaten x, y, z darstellen, nämlich:

$$X' = X'_0 + \left(\frac{\partial X'}{\partial x}\right)_0 r \sin\vartheta \cos\varphi + \left(\frac{\partial X'}{\partial y}\right)_0 r \sin\vartheta \sin\varphi +$$
$$+ \left(\frac{\partial X'}{\partial z}\right)_0 r \cos\vartheta$$

etc. für die übrigen Kraftcomponenten, wobei der Index 0 bedeutet, dass $r = 0$ zu setzen ist. Dann ergibt die Substitution des Werthes von F aus (1) und die Integration über die ganze Kugelfläche mit Vernachlässigung der kleinen Glieder höherer Ordnung den Ausdruck:

$$\frac{\alpha\, c\, d t}{3} \left\{\left[\left(\frac{\partial M'}{\partial x}\right)_0 - \left(\frac{\partial L'}{\partial y}\right)_0\right] \sin\Theta_0 - \frac{4\pi}{\lambda} Z'_0 \cos\Theta_0\right\}.$$

Nun ist aber nach den Gleichungen des elektromagnetischen Feldes:

$$\left(\frac{\partial M'}{\partial x}\right)_0 - \left(\frac{\partial L'}{\partial y}\right)_0 = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial Z'}{\partial t}\right)_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial Z'_0}{\partial t}$$

also der obige Ausdruck:

$$\frac{\alpha\, \partial t}{3} \left\{\frac{\partial Z'_0}{\partial t} \sin\Theta_0 - \frac{4\pi}{\tau} Z'_0 \cos\Theta_0\right\}$$

und endlich durch Integration über die Zeit einer Periode τ der gesuchte Weıth:

$$E_3 = \frac{\alpha}{3}\int_0^\tau d\,t\left\{\frac{\partial Z'_0}{\partial t}\sin\Theta_0 - \frac{4\pi}{\tau}Z'_0\cos\Theta_0\right\}.$$

Hierin lässt sich noch das erste Glied durch partielle Integration umformen, und ergibt, da Z'_0 die Periode τ besitzt, und da nach (1)

$$\Theta_0 = \frac{2\pi t}{\tau} + \delta$$

$$E_3 = -\frac{2\pi\alpha}{\tau}\int_0^\tau d\,t\,Z'_0\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \delta\right).$$

Somit wird die gesammte, aus einer um die secundäre Schwingung gelegten Fläche in der Schwingungszeit ausströmende Energie nach (6):

$$E_1 + E_2 + E_3 = \frac{16\pi^4}{3\lambda^3}\alpha^2 - \frac{2\pi\alpha}{\tau}\int_0^\tau d\,t\,Z'_0\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \delta\right).$$

Diese Energie muss dem Centrum der secundären Schwingung von Aussen zugeführt werden, wenn der Schwingungszustand stationär bleiben soll. Nehmen wir nun an, dass dieselbe gleich Null ist, woraus sich α entweder $= 0$, oder, was wir von nun an voraussetzen wollen:

$$\text{(10a)} \qquad \alpha = \frac{3}{8\pi^3}\frac{\lambda^3}{\tau}\int_0^\tau d\,t\,Z'_0\cos\left(\frac{2\pi\tau}{\tau} + \delta\right)$$

ergibt, so haben wir im secundären Leiter eine Schwingung, die ohne fremde Energiezufuhr unbegrenzt fortdauern kann. Dann wird also die von der secundären Schwingung durch Ausstrahlung emittirte Energie gerade wieder ersetzt durch Absorption von Energie aus der primären Welle, oder mit anderen Worten: der secundäre Leiter schwingt durch Resonanz mit der primären Welle. Der Betrag der absorbirten bezw. emittirten Energie ist durch den Werth von α bedingt, wie er aus der letzten Gleichung hervorgeht. Dabei kommt es, wie ersichtlich und leicht begreiflich, nur auf diejenige elektrische Kraftcomponente Z'_0 der primären Welle im secundären Schwingungscentrum an, die mit der Schwingungsrichtung der

Electricität im Resonator übereinstimmt; diese allein vermag den Resonator zu erregen. Da sie nur von der Zeit abhängt, lässt sie sich stets auf die Form bringen:

$$(11) \qquad Z'_0 = A \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \delta'\right)$$

wobei A und δ' constant, und $A > 0$.

Dann ist:

$$\alpha = \frac{3}{16\pi^3} \lambda^3 A \cos\left(\delta' - \delta\right).$$

Die Stärke des Mitschwingens hängt also ausser von der Wellenlänge λ und der Amplitude A der primären Welle noch ab von der Phasendifferenz $\delta' - \delta$. Zunächst ist für das Mitschwingen erforderlich, dass $\cos(\delta' - \delta)$ positiv ist, da sowohl α als auch A positiv sind. Wir wollen daher $\delta' - \delta$ zwischen $-\pi/2$ und $+\pi/2$ annehmen. Weiter ist die Resonanz um so stärker, je kleiner der absolute Betrag dieser Phasendifferenz wird, ein Maximum, wenn $\delta' - \delta = 0$. Welcher dieser Fälle unter gegebenen Umständen in der Natur eintritt, wird von der Beschaffenheit des secundären Leiters abhängen, insbesondere von dem Unterschied seiner Eigenperiode und der Periode der primären Welle. Je schlechter die Uebereinstimmung, um so grösser die Phasendifferenz und um so schwächer die Resonanz. Da wir hier ein näheres Eingehen auf die Verhältnisse in dem Raume, wo die benutzten Ausdrücke für die elektromagnetischen Kräfte nicht mehr gelten, vermeiden wollen, so nehmen wir $\delta' - \delta$ als gegeben an.

Um die physikalische Bedeutung des Werthes dieser Differenz zu übersehen, vergleichen wir die gleichzeitigen Werthe der elektrischen Kräfte Z und Z' in der unmittelbaren Nähe des secundären Schwingungscentrums. Für Z_0' hatten wir:

$$Z_0' = A \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \delta'\right)$$

für Z aus (8) für kleine Werthe von r:

$$Z = -\frac{\alpha}{r^3}(1 - 3\cos^2\vartheta)\sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \delta\right).$$

Wenn also die Resonanz ein Maximum ist ($\delta = \delta'$), so zeigen die elektrischen Kräfte Z' und Z in der Nähe des Resonators einen Phasenunterschied von $\pi/2$. In der That lässt sich unmittelbar einsehen, dass in dem Augenblick, wo die erregende primäre Kraft Z'_0 ein Maximum ist, die im linearen Leiter inducirte Strömung ihre grösste Intensität erreicht hat, mithin das dadurch bedingte magnetische Feld in der nächsten Umgebung ein Maximum der Intensität aufweist, während die entsprechenden elektrischen Kräfte dortselbst verschwinden.

Wir wollen im Folgenden maximale Resonanz voraussetzen, also $\delta = \delta'$ annehmen; dann wird:

$$\alpha = \frac{3}{16\,\pi^3}\,\lambda^3 A \tag{12}$$

und die in der Zeit einer Schwingung absorbirte Energie:

$$\frac{16\,\pi^4}{3\,\lambda^3}\,\alpha^2 = \pi\,\alpha\,A = \frac{3}{16\,\pi^2}\,\lambda^3 A^2 \tag{13}$$

§ 2. Nachdem die Amplitude und Phase der secundären Schwingung berechnet ist, wird es leicht, die Vorgänge in beliebiger Entfernung von der secundären Schwingung anzugeben. Hier soll nur beispielsweise der Fall behandelt werden, dass die primäre Welle eine ebene ist, fortschreitend längs der positiven x-Axe und polarisirt in der xy-Ebene, so dass die Richtung der elektrischen Kraft mit der z-Axe zusammenfällt.

Ihre Gleichungen sind, im Anschluss an (11)

$$\left\{\begin{array}{ll} X' = 0 & L' = 0 \\ Y' = 0 & M' = -A\cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right) \\ Z' = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right) & N' = 0 \end{array}\right. \tag{14}$$

wobei $\delta' = 0\,(= \delta)$ gesetzt ist. So lange diese Welle allein im Luftraum vorhanden ist, wird sie durch jede zur x-Axe senkrecht gelegte Flächeneinheit in der Zeit τ die constante Energiemenge $(\lambda/8\,\pi)\,A^2$ hindurchsenden. Wenn ihr aber der secundäre Leiter entgegengestellt wird, so absorbirt derselbe in der Zeit τ den Energiebetrag (13) und strahlt ihn gleichzeitig nach allen Richtungen hin aus. Dadurch wird nothwendig die in der x-Richtung sich fortpflanzende Strahlung geschwächt, oder optisch gesprochen: der secundäre Leiter wirft einen Schatten in der Richtung der primären Strahlung.

Um diese Verhältnisse näher zu untersuchen, denken wir uns eine kreisförmige, als „Schirm“ zu bezeichnende Fläche hinter dem secundären Schwingungscentrum, also auf der Seite der positiven x, so in den Weg der primären Strahlen gestellt, dass die x-Axe Symmetrieaxe des Schirmes ist. Dann liegt der Mittelpunkt des Schirmes dem secundären Schwingungscentrum gerade gegenüber; ihre Entfernung sei r_0, der Radius des Schirmes ϱ. Wir wollen nun die gesammte in der Zeit τ auf den Schirm auffallende Energiemenge ε berechnen, jedoch unter der vereinfachenden Voraussetzung, dass die Entfernung r_0 gross ist gegen die Wellenlänge λ, wogegen wir über ϱ keine besondere Annahme einführen. ε besteht wie der Ausdruck (6) aus drei Theilen:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \tag{15}$$

Der erste Theil entspricht der durch die isolirte primäre Strahlung auffallenden Energie:

$$\varepsilon_1 = \frac{\lambda}{8} A^2 \varrho^2 = \frac{\lambda}{8} A^2 (r_1{}^2 - r_0{}^2).$$

Der zweite Theil entspricht der durch die Emission des secundären Leiters allein auffallenden Energie. Dieselbe ergiebt sich aus dem Ausdruck

$$\frac{c}{4\pi} d\sigma\, dt (YN - ZM)$$

durch Einsetzen der Werthe (8) und (9), und Integration über die Zeit τ und über die Fläche des Schirmes. Die Integration über die Zeit ergiebt:

$$\frac{2\pi^3 \alpha^2}{r^2 \lambda^3} \cos\varphi \sin^3\vartheta\, d\sigma.$$

Nun kann man setzen:

$$d\sigma = r\, dr\, d\omega,$$

wenn ω der Winkel ist, welchen die durch einen Schirmpunkt und die x-Axe gelegte Ebene mit der xy-Ebene bildet, positiv gerechnet von der xy-Ebene gegen die xz-Ebene hin. Dann ist auch:

$$\sin^2\vartheta = \cos^2\omega + \frac{r_0^2}{r^2}\sin^2\omega \qquad \sin\vartheta\cos\varphi = \frac{r_0}{r}.$$

Folglich der Differentialausdruck:

$$\frac{2\pi^3\alpha^2 r_0}{\lambda^3 r^2}\left(\cos^2\omega + \frac{r_0^2}{r^2}\sin^2\omega\right) dr\, d\omega$$

und durch Integration über ω von 0 bis 2π und über r von r_0 bis $r_1 = \sqrt{r_0^2 + \varrho^2}$:

$$\varepsilon_2 = \frac{8\pi^4\alpha^2}{3\lambda^3}\left\{1 - \frac{r_0(3r_1^2 + r_0^2)}{4r_1^3}\right\}$$

und nach (12):

$$\varepsilon_2 = \frac{3\lambda^3 A^2}{32\pi^2}\left\{1 - \frac{r_0(3r_1^2 + r_0^2)}{4r_1^3}\right\}.$$

Der dritte Theil ε_3 der auf den Schirm auffallenden Energie wird erhalten durch Integration des Differentialausdrucks

$$\frac{c}{4\pi} d\sigma\, dt\,(Y' N + Y N' - Z' M - Z M').$$

Berücksichtigt man, dass r gross gegen λ, so bleiben in den Werthen (8) und (9) der Kraftcomponenten nur die Glieder mit $\frac{1}{r}$ stehen; nämlich, da $\delta = 0$:

$$Z = \frac{4\pi^2\alpha}{\lambda^2 r}\sin^2\vartheta \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r}{\lambda}\right)$$

$$M = -\frac{4\pi^2\alpha}{\lambda^2 r}\sin\vartheta\cos\varphi\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r}{\lambda}\right)$$

und man erhält durch Einsetzen von Y', N', Z', M' aus (14):

$$\frac{\pi c\alpha A}{\lambda^2 r} d\sigma dt(\sin^2\vartheta + \sin\vartheta\cos\varphi)\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r}{\lambda}\right).\cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r_0}{\lambda}\right),$$

ferner durch Integration über die Schwingungszeit τ:

$$-\frac{\pi\alpha A}{2\lambda r} d\sigma(\sin^2\vartheta + \sin\vartheta\cos\varphi)\sin\frac{2\pi}{\lambda}(r - r_0).$$

Endlich durch Integration über $d\sigma$, wobei wieder r und ω in der nämlichen Weise wie oben als Integrationsvariable einzuführen sind:

$$\varepsilon_3 = -\frac{\pi^2\alpha A}{2\lambda}\int_{r_0}^{r_1} dr\left(1 + \frac{r_0}{r}\right)^2 \sin\frac{2\pi}{\lambda}(r - r_0).$$

Da nun λ klein ist gegen r_0, so lässt sich der Ausdruck mittels partieller Integration reduciren auf:

$$\varepsilon_3 = -\pi\alpha A\left\{1 - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{r_0}{r_1}\right)^2\cos\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_0)\right\}$$

oder nach (12):

$$\varepsilon_3 = -\frac{3\lambda^3 A^2}{16\pi^2}\left\{1 - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{r_0}{r_1}\right)^2\cos\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_0)\right\}$$

Wie man sieht, ist in dem Gesammtwerth (15) der in der Zeit t auf den Schirm fallenden Energie: $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ der erste und der zweite Theil stets positiv, der dritte Theil stets negativ. Während aber ε_1 und ε_2 mit wachsendem r_1 stetig zunehmen, und zwar ε_1 über alle Grenzen hinaus, ε_2 nur bis zu einem gewissen Grenzwerth, schwankt ε_3 beständig hin und her. Dabei bleibt der absolute Betrag von ε_3 stets grösser als der von ε_2, so dass die auf den Schirm fallende Energiemenge unter allen Umständen kleiner ist, als wenn die primäre Welle allein vorhanden wäre. Die Strahlung der primären Welle erleidet also durch die im secundären Leiter wirksame Resonanz eine Schwächung, deren Betrag mit der Entfernung r_1 des Schirmrandes vom Resonator abwechselnd zu- und abnimmt. Ueberhaupt ist einleuchtend, dass die auf irgend einen Schirm fallende Strahlung nur abhängt von der Randcurve des Schirms. Um die Bedingungen aufzufinden, unter welchen die Erscheinung am auffälligsten wird, untersuchen wir das (positiv genommene) Verhältniss, in welchem die Strahlung der primären Welle auf den Schirm durch die im secundären Leiter stattfindende Absorption geschwächt wird:

$$\frac{\varepsilon_1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{\varepsilon_1} = \frac{-(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{\varepsilon_1}.$$

Soll ε_1 im Nenner nicht allzusehr überwiegen, so muss r_1 von derselben Ordnung wie r_0 genommen werden. Dann ist im Zähler ε_3 allein maassgebend, und man erhält für das Schwächungsverhältniss:

$$-\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = \frac{3\lambda^2}{2\pi^2\varrho^2}\left\{1 - \cos\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_0)\right\}.$$

Dieser Ausdruck wird ein Maximum für

$$r_1 - r_0 = (2\,\mathfrak{a} + 1)\cdot\frac{\lambda}{2}, \qquad \mathfrak{a} = 0, 1, 2, 3\,..$$

und der Maximalwerth beträgt:

$$\frac{3\lambda^2}{\pi^2\varrho^2}$$

oder, da $\varrho^2 = r_1^{\,2} - r_0^{\,2} = (r_1 + r_0)(r_1 - r_0) = (2\,\mathfrak{a} + 1)\,r_0\lambda$:

$$\frac{3}{(2\,\mathfrak{a} + 1)\pi^2}\cdot\frac{\lambda}{r_0}.$$

Die stärkste Schwächung findet also statt für $a = 0$:

$$r_1 = r_0 + \frac{\lambda}{2}, \quad \varrho = \sqrt{r_0 \lambda}$$

und beträgt:

$$\frac{3}{\pi^2} \frac{\lambda}{r_0},$$

immerhin eine kleine Zahl.

Durch Aufstellung mehrerer Resonatoren (z. B. eines Gitters) lässt sich die Schwächung der primären Strahlung erheblich vervielfachen, doch nicht bis zum gänzlichen Verschwinden derselben, sondern offenbar nur bis zu einer gewissen Grenze, welche durch die eigene Ausstrahlung der Resonatoren bedingt ist. Dabei wird die strahlende Energie der primären Welle durch die secundären Leiter natürlich nicht im Ganzen verringert, sondern nur in andere Richtungen, nach seitwärts und nach rückwärts, zerstreut. Die Rechnung ist in der Weise auszuführen, dass für jeden Resonator eine besondere Gleichung nach dem Muster von (10a) aufgestellt wird, in welcher die Strahlung der übrigen Resonatoren mit in den Ausdruck der primären Kraft Z'_0 eingeht. Man ersieht leicht daraus, dass, wenn die primäre Welle aus mehreren übereinandergelagerten Wellen besteht, die gesammte Absorption sich additiv aus den Absorptionen zusammensetzt, welche die einzelnen Wellen erfahren. So erhält man zur Bestimmung von Amplituden und Phasen der in den secundären Leitern erregten Schwingungen bei vollkommener Resonanz gerade die hinreichende Anzahl von Gleichungen.

§ 3. Die hier dargelegte Methode lässt sich ebenso auf Schallschwingungen in der Luft anwenden und liefert auch hierfür die Amplitude der von einer primären periodischen Welle in einem gleichgestimmten Resonator erregten Schwingungen, falls die Dimensionen des Resonators klein sind gegen die Wellenlängen seines Eigentons in Luft und falls Reibungswiderstände nicht in Betracht kommen. Wenn auf die Ausstrahlung des Resonators keine Rücksicht genommen wird, so ist es bekanntlich in diesem Fall überhaupt unmöglich, ein Maximum für die Stärke des Mitschwingens anzugeben.

Jedoch haben weder akustische noch im engern Sinn elektrische Aufgaben zu der vorliegenden Untersuchung geführt.

Dieselbe ist vielmehr angeregt worden durch die Frage nach den stationären Strahlungsvorgängen innerhalb eines mechanisch ruhenden Mediums, welches sich auf gleichmässiger constanter Temperatur befindet und von Körpern der nämlichen Temperatur umgeben ist. In einem solchen thermischen Gleichgewichtszustand wird von allen im Innern des Mediums gelegenen Theilchen fortwährend strahlende Energie emittirt und absorbirt, und zwar in der Weise, dass im Ganzen strahlende Energie niemals verloren geht oder gewonnen wird, sondern dass ihr Gesammtbetrag unverändert bleibt. Die Vorfrage, inwiefern ein solcher Process denkbar ist, wenn die Strahlung als electromagnetischer Vorgang gedeutet wird, findet in der vorliegenden Untersuchung ihre Beantwortung. Jedes absorbirende bez. emittirende Theilchen wirkt ähnlich wie das oben behandelte secundäre Schwingungscentrum, es hat die Bedeutung, die auffallende und durch Resonanz in bestimmtem angebbarem Betrage absorbirte Strahlung immer auf's Neue nach allen Richtungen zu zerstreuen. Das Kirchhoff'sche Gesetz von der Proportionalität des Absorptions- und des Emissionsvermögens ist eine unmittelbare Folge dieses Verhaltens. Zur Berechnung der Schwingungsamplitude braucht man auf die Natur der emittirenden Theilchen nicht näher einzugehen, es genügt die Voraussetzung, dass die Dimensionen der Schwingungscentren klein sind gegen die Wellenlänge, wie das z. B. auch der Fall ist, wenn man hinreichend kleine Schwingungen ponderabler Massen mit constanten electrischen Ladungen annimmt.

Weitere Resultate hoffe ich der Akademie bei einer anderen Gelegenheit vorlegen zu können.